

«Διδασκαλία μαθήματος μαθηματικών Άλγεβρας Α' Λυκείου, με εφαρμογή του λογισμικού GeoGebra και χρήση φύλλων εργασίας, «Εξίσωση-Ανίσωση 2ου βαθμού, Μορφές - Πρόσημο Τριωνύμου», Γνωριμία με το περιβάλλον και τα βασικά εργαλεία του λογισμικού μαθηματικών GeoGebra»

Μπολοτάκης Γιώργος

Μαθηματικός, Επιμορφωτής Β' επιπέδου,
συγγραφέας του βιβλίου «GeoGebra εύκολα και απλά»
gbolotis@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της εργαστηριακής παρουσίασης είναι να γνωρίσουν οι συνάδερφοι εκπαιδευτικοί **πώς, πότε και γιατί** ένα μάθημα μαθηματικών γίνεται στο εργαστήριο Η/Υ, καθώς και το περιβάλλον και τη χρήση των βασικών εργαλείων του λογισμικού.

Στο πρώτο μέρος οι συνάδερφοι μαθηματικοί, προπτυχιακοί και μεταπτυχιακοί φοιτητές μαθηματικών τμημάτων και όσοι εκπαιδευτικοί άλλων ειδικοτήτων επιθυμούν, κάθονται κατά ομάδες των δύο ατόμων μπροστά σε ένα Η/Υ, στον οποίο είναι εγκατεστημένο το λογισμικό μαθηματικών «**GeoGebra**» έκδοση 5.xxx και η εφαρμογή με την οποία θα ασχοληθούν (προσομοίωση τάξης μαθητών). Σε κάθε ομάδα έχουν μοιραστεί τα αντίστοιχα **φύλλα εργασίας** που καθοδηγούν στην χρήση της εφαρμογής και στην ανακάλυψη και διατύπωση των προς μάθηση εννοιών. Η διάρκεια αυτής της διαδικασίας υπολογίζεται σε σαράντα πέντε λεπτά (45') περίπου.

Στο δεύτερο μέρος κάθε συνάδερφος χειρίζεται τον δικό του φορητό Η/Υ, ο επιμορφωτής παρουσιάζει το περιβάλλον του λογισμικού, τα βασικά εργαλεία του και καλεί τους επιμορφούμενους να δημιουργήσουν με τις οδηγίες του σύντομες και απλές προσομοιώσεις μαθηματικών. Η διάρκεια αυτής της διαδικασίας υπολογίζεται από δύο έως τρεις (3) διδακτικές ώρες.

Στόχοι της παρουσίασης είναι οι επιμορφούμενοι να καταλάβουν την φιλοσοφία της ανακαλυπτικής μάθησης με χρήση εφαρμογών λογισμικού και ότι έχοντας στοιχειώδεις γνώσεις των εργαλείων του λογισμικού, μπορούν σχετικά εύκολα να δημιουργήσουν εφαρμογές που θα τους βοηθήσουν στο διδακτικό τους έργο.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: προσομοίωση, φύλλο εργασίας, ανακαλυπτική μάθηση

ΕΠΙΜΟΡΦΟΥΜΕΝΟΙ

Μαθηματικοί, προπτυχιακοί – μεταπτυχιακοί φοιτητές Μαθηματικών Τμημάτων, εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, κλπ.

ΕΞΟΠΛΙΣΜΟΣ

Κάθε επιμορφούμενος θα έχει τον προσωπικό του φορητό Η/Υ (LapTop) με ποντίκι (για ευκολότερη σχεδίαση) με εγκατεστημένη την τελευταία έκδοση (5) του λογισμικού GeoGebra (ιστοσελίδα:

<http://www.geogebra.org/download> κλικ στο εικονίδιο , αφού κατεβεί το αρχείο εξ' ολοκλήρου, αποθηκεύεται στον φάκελο «Λήψεις» ή στον φάκελο «Ληφθέντα Αρχεία», διπλό κλικ στο αρχείο).

ΧΩΡΟΣ ΔΙΕΞΑΓΩΓΗΣ

Αίθουσα με τραπέζια-θρανία και παροχές ρεύματος για είκοσι (20) φορητούς Η/Υ ή εργαστήριο Η/Υ με δεκαπέντε (15) τουλάχιστον Η/Υ

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗΣ

Εξίσωση - Ανίσωση 2ου βαθμού, Μορφές Τριωνύμου

☒ Ανάλυση Τριωνύμου ☒ ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7

$$\alpha \neq 0, \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2} \right] = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha} \quad (1)$$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ (Διακρίνουσα)

☒ Αν $\Delta > 0$ ορίζεται $\sqrt{\Delta}$ ως Δ ☒ ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒ 8

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left(x - \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right) \left(x - \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right) = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = 0 \vee x - \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = 0 \right) \Leftrightarrow \left(x = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \vee x = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right)$$

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$ με $\rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ (δύο ρίζες άνισες)

☒ Αν $\Delta = 0$ τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 = \alpha \left(x - \frac{-\beta}{2\alpha} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{2\alpha}$

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho)^2$ με $\rho = \rho_1 = \rho_2 = -\frac{\beta}{2\alpha}$ (δύο ρίζες ίσες ή μία διπλή)

☒ Αν $\Delta < 0$ τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2} \right] = \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2} \right] \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (καμία ρίζα)

Εικόνα 9. Δραστηριότητα 1: Ανάλυση – Μορφές Τριωνύμου

1_Εξίσωση_Ανίσωση_2ου_βαθμ_Μορφές_Τριωνύμου.ggb

Αρχείο Επεξεργασία Προβολή Επιλογές Εργαλεία Παράθυρο Βοήθεια Είσοδος...

Εξίσωση - Ανίσωση 2ου βαθμού, Μορφές Τριωνύμου

☒ Είσοδος

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

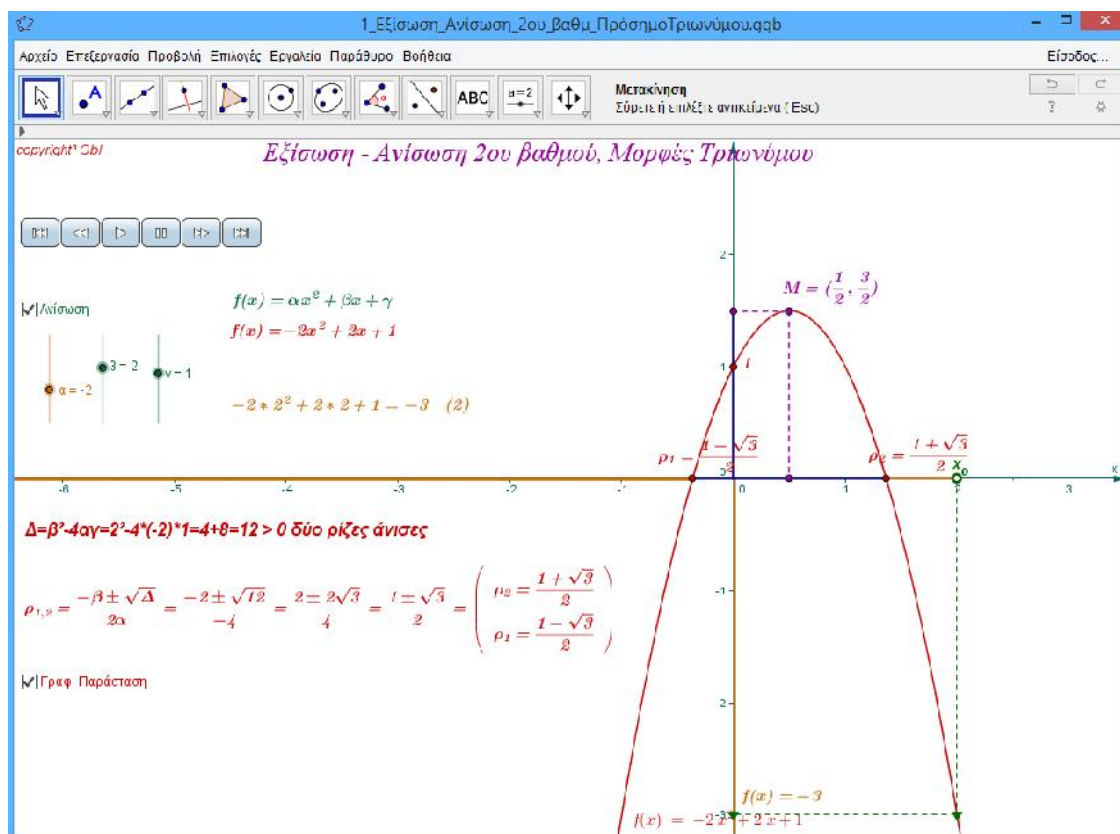
$$-2x^2 + 2x + 1 = 0$$

$\alpha = -2, \beta = 2, \gamma = 1$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4(-2)(1) = 4 + 8 = 12 > 0$ Δύο ρίζες άνισες

$$\rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{-4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{-4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{-2} = \begin{cases} \rho_3 = \frac{1 + \sqrt{3}}{-2} \\ \rho_4 = \frac{1 - \sqrt{3}}{-2} \end{cases}$$

Εικόνα 10. Δραστηριότητα II: Λύση Εξίσωσης 2ου βαθμού



Εικόνα 11. Δραστηριότητα III: Λύση Ανίσωσης 2ου βαθμού

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Μπολτοτάκης, Γ. «GeoGebra εύκολα και απλά», Εκδόσεις SmartLearn
 Κυνηγός, Χ. (2007). «Παιδαγωγική Αξιοποίηση των Ψηφιακών Τεχνολογιών
 για τη Διδακτική των Μαθηματικών», Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα).

ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ-ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ (ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Όνοματεπώνυμο:

Τάξη:

Ημερομηνία:

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ Ι: ΑΝΑΛΥΣΗ – ΜΟΡΦΕΣ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ

Ανοίξτε το αρχείο **1_Εξίσωση_Ανίσωση_2ου_βαθμ_ΠρόσημοΤριωνύμου.ggb**. Κάντε κλικ στο κουμπί "**Ανάλυση Τριωνύμου:**" και κατόπιν κλικ στο κουμπί "**1**"

1. Κάντε κλικ στο κουμπί "**1**". Εξηγήστε πώς προκύπτει το δεύτερο μέλος της ισότητας

Απάντηση:

2. Κάντε κλικ στο κουμπί "**2**". Εξηγήστε πώς προκύπτει το τελευταίο μέλος της ισότητας

Απάντηση:

3. Κάντε κλικ στο κουμπί "**3**". Εξηγήστε πώς προκύπτει το τελευταίο μέλος της ισότητας

Απάντηση:

4. Κάντε κλικ στο κουμπί "**4**". Εξηγήστε πώς προκύπτει το τελευταίο μέλος της ισότητας

Απάντηση:

5. Κάντε κλικ στο κουμπί "**5**". Εξηγήστε πώς προκύπτει το τελευταίο μέλος της ισότητας

Απάντηση:

6. Προσπαθήστε να αναλύσετε το τριώνυμο $3x^2+5x-12$ με τον ίδιο τρόπο.

Απάντηση:

.....**Δ=**.....

7. Κάντε κλικ στο κουμπί "**6**", κλικ στο κουμπί "**7**" και κατόπιν κλικ στο κουμπί "**1'**", Εξηγήστε πώς προκύπτει το τελευταίο μέλος της ισότητας

Απάντηση:

8. Κάντε κλικ στο κουμπί "**2'**", Εξηγήστε πώς προκύπτει το τελευταίο μέλος της ισότητας

Απάντηση:

9. Κάντε κλικ στο κουμπί " 3' ", Εξηγήστε πώς προκύπτει το τελευταίο μέλος της ισότητας

Απάντηση:

10. Κάντε κλικ στο κουμπί " 4' ", Εξηγήστε πώς προκύπτει το τελευταίο μέλος της ισότητας

Απάντηση:

11. Κάντε κλικ στο κουμπί " 5' " και κατόπιν κλικ στο κουμπί " 6' ", Εξηγήστε τις συνεπαγωγές, το μετασχηματισμό του τύπου του τριωνύμου σε γινόμενο παραγόντων και τον τύπο των ριζών του τριωνύμου

Απάντηση:

.....

12. Κάντε κλικ στο κουμπί " 7' ", Εξηγήστε τη συνεπαγωγή, το μετασχηματισμό του τύπου του τριωνύμου, και τον τύπο των ριζών

Απάντηση:

.....

13. Κάντε κλικ στο κουμπί " 8' ", Εξηγήστε το μετασχηματισμό του τύπου του τριωνύμου, και γιατί το τριώνυμο δεν έχει ρίζες.

Απάντηση:

.....

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ II: ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

Κάντε κλικ στο κουμπί "**Ανάλυση Τριωνύμου:**" για να το αποεπιλέξετε και κατόπιν κλικ στο κουμπί "**Εξίσωση**". Δημιουργείτε κινώντας τα σημεία των δρομέων **α**, **β**, **γ**, διάφορες εξισώσεις δευτέρου βαθμού και παρακολουθείτε τον τρόπο εργασίας για την επίλυσή τους. Π.χ. μπορείτε να σχηματίσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

1. $x^2+4x-5=0$ 2. $3x^2-2x-2=0$ 3. $x^2-2x=0$ 4. $4x^2-4x+1=0$ 5. $x^2+2x+3=0$
6. $-2x^2+x+3=0$ 7. $-3x^2+2=0$ 8. $-x^2+2x-4=0$ 9. $-3x^2+8x-4=0$ 10. $-4x^2=0$

Κλείστε το αρχείο **1_Εξίσωση_Ανίσωση_2ου_βαθμ_ΠρόσημοΤριωνύμου.ggb** χωρίς να το αποθηκεύσετε. Λύστε τις παραπάνω εξισώσεις στο τετράδιό σας.

Ανοίξτε πάλι το αρχείο

1_Εξίσωση_Ανίσωση_2ου_βαθμ_ΠρόσημοΤριωνύμου.ggb κάντε κλικ στο κουμπί "**Εξίσωση**", και επαληθεύστε τα αποτελέσματα των εξισώσεων που λύσατε στο τετράδιό σας δίνοντας τις τιμές των συντελεστών στους δρομείς **α**, **β**, **γ**.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ III: ΛΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΗΣ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

Κάντε κλικ στο κουμπί "**Εξίσωση**" για να το αποεπιλέξετε και κατόπιν κλικ στο κουμπί "**Ανίσωση**". Εμφανίζονται το τριώνυμο, οι ρίζες της αντίστοιχης εξίσωσης, ο άξονας των πραγματικών αριθμών με τα σημεία των ριζών, ένα

κινούμενο πάνω στον άξονα σημείο x_0 , και η ισότητα (2) που εκφράζει την τιμή του τριωνύμου για x ίσο με την τετμημένη του σημείου x_0 , και τα κουμπιά:



μεταφορά του σημείου x_0 τέρμα αριστερά



μεταφορά του σημείου x_0 ένα βήμα πίσω



έναρξη κίνησης του σημείου x_0



προσωρινή παύση της κίνησης του σημείου x_0



μεταφορά του σημείου x_0 ένα βήμα μπροστά



μεταφορά του σημείου x_0 τέρμα δεξιά

1. Επιλέγουμε ένα τριώνυμο με ορίζουσα $\Delta > 0$, δίνοντας κατάλληλες τιμές στους συντελεστές (δρομείς) α, β, γ , π.χ. $\alpha = -2, \beta = 2, \gamma = 1$. Κάνουμε κλικ στο κουμπί  και παρακολουθούμε το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου στην ισότητα (2) σε σχέση με το πρόσημο του συντελεστή α .

- i. Τι πρόσημο έχουν α και **τιμή του τριωνύμου** (τύπος 2) όταν το σημείο x_0 βρίσκεται στο διάστημα **αριστερά** της μικρότερης ρίζας;

Απάντηση:.....

- ii. Τι τιμή έχει το τριώνυμο (τύπος 2) όταν το σημείο x_0 βρίσκεται **πάνω** στο σημείο της μικρότερης ρίζας;

Απάντηση:.....

- iii. Τι πρόσημο έχουν α και **τιμή του τριωνύμου** (τύπος 2) όταν το σημείο x_0 βρίσκεται στο διάστημα **μεταξύ** των δύο ριζών;

Απάντηση:.....

- iv. Τι τιμή έχει το τριώνυμο (τύπος 2) όταν το σημείο x_0 βρίσκεται **πάνω** στο σημείο της μεγαλύτερης ρίζας;

Απάντηση:.....

- v. Τι πρόσημο έχουν α και **τιμή του τριωνύμου** (τύπος 2) όταν το σημείο x_0 βρίσκεται στο διάστημα **δεξιά** της μεγαλύτερης ρίζας;

Απάντηση:.....

2. Αλλάξτε τις τιμές στους συντελεστές (δρομείς) α, β, γ ώστε πάλι να είναι η ορίζουσα $\Delta > 0$, π.χ. $\alpha = 4, \beta = 3, \gamma = -7$. Και επαναλάβετε τις ερωτοαπαντήσεις **I., II., III., IV., V.** της προηγούμενης εργασίας.

3. Επιλέγουμε ένα τριώνυμο με ορίζουσα $\Delta = 0$, δίνοντας κατάλληλες τιμές στους συντελεστές (δρομείς) α, β, γ , π.χ. $\alpha = -4, \beta = 4, \gamma = -1$. Μετακινούμε το σημείο x_0 από τα αριστερά της διπλής ρίζας προς τα δεξιά με αντίστοιχα κουμπιά και παρακολουθούμε το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου στην ισότητα (2) σε σχέση με το πρόσημο του συντελεστή α .

- i. Τι πρόσημο έχουν α και **τιμή του τριωνύμου** (τύπος 2) όταν το σημείο x βρίσκεται στο διάστημα **αριστερά** της διπλής ρίζας;

Απάντηση:.....

- ii. Τι τιμή έχει το τριώνυμο (τύπος 2) όταν το σημείο x βρίσκεται **πάνω** στο σημείο της διπλής ρίζας;

Απάντηση:.....

- iii. Τι πρόσημο έχουν a και **τιμή του τριωνύμου** (τύπος 2) όταν το σημείο x βρίσκεται στο διάστημα **δεξιά** της διπλής ρίζας;

Απάντηση:.....

4. Αλλάξτε τις τιμές στους συντελεστές (δρομείς) a, β, γ ώστε πάλι να είναι η ορίζουσα $\Delta=0$, π.χ. $a=1, \beta=-4, \gamma=4$. Και επαναλάβετε τις ερωτοαπαντήσεις **i., ii., iii.** της προηγούμενης εργασίας.

5. Αλλάξτε τις τιμές στους συντελεστές (δρομείς) a, β, γ ώστε να είναι η ορίζουσα $\Delta<0$, π.χ. $a=2, \beta=-2, \gamma=1$. Μετακινήστε το σημείο x από τα αριστερά προς τα δεξιά και παρακολουθείστε το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου στην ισότητα (2) σε σχέση με το πρόσημο του συντελεστή a .

Τι πρόσημο έχουν a και **τιμή του τριωνύμου** (τύπος 2) όταν το σημείο διατρέχει όλο τον άξονα;

Απάντηση:.....

6. Αλλάξτε τις τιμές στους συντελεστές (δρομείς) a, β, γ ώστε πάλι να είναι η ορίζουσα $\Delta<0$, π.χ. $a=-2, \beta=3, \gamma=-2$. Μετακινήστε το σημείο x από τα αριστερά προς τα δεξιά και παρακολουθείστε το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου στην ισότητα (2) σε σχέση με το πρόσημο του συντελεστή a .

Τι πρόσημο έχουν a και **τιμή του τριωνύμου** (τύπος 2) όταν το σημείο διατρέχει όλο τον άξονα;

Απάντηση:.....

Συμπεράσματα: (Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα)

Πρόσημο τριωνύμου $ax^2+bx+\gamma, a \neq 0$	
$\Delta > 0$	
$\Delta = 0$	
$\Delta < 0$	

7. Κάντε κλικ στο κουμπί **"Γραφ. Παράσταση"**. Δώστε στους συντελεστές τις τιμές $a=2, \beta=4, \gamma=-1$. Μετακινήστε το σημείο x από αριστερά της γραφ. παράστασης προς τα δεξιά της παρακολουθώντας το πρόσημο των τιμών της $f(x)$ επιβεβαιώστε τα αποτελέσματά σας στην πρώτη γραμμή ($\Delta>0$) του παραπάνω πίνακα.

8. Μετακινήστε το σημείο του δρομέα γ στην τιμή 2 ($\gamma=2$). Μετακινήστε το σημείο x από αριστερά της γραφ. παράστασης προς τα δεξιά της

παρακολουθώντας το πρόσημο των τιμών της $f(x)$ επιβεβαιώστε τα αποτελέσματά σας στην δεύτερη γραμμή ($\Delta=0$) του παραπάνω πίνακα.

9. Μετακινείτε το σημείο του δρομέα γ στην τιμή 3 ($\gamma=3$). Μετακινείτε το σημείο x από αριστερά της γρ. παράστασης προς τα δεξιά της παρακολουθώντας το πρόσημο των τιμών της $f(x)$ επιβεβαιώστε τα αποτελέσματά σας στην τρίτη γραμμή ($\Delta<0$) του παραπάνω πίνακα.
10. Δώστε στους συντελεστές τις τιμές $\alpha=-4$, $\beta=4$, $\gamma=3$. Μετακινείτε το σημείο x από αριστερά της γρ. παράστασης προς τα δεξιά της παρακολουθώντας το πρόσημο των τιμών της $f(x)$ επιβεβαιώστε τα αποτελέσματά σας στην πρώτη γραμμή ($\Delta>0$) του παραπάνω πίνακα.
11. Μετακινείτε το σημείο του δρομέα γ στην τιμή -1 ($\gamma=-1$). Μετακινείτε το σημείο x από αριστερά της γρ. παράστασης προς τα δεξιά της παρακολουθώντας το πρόσημο των τιμών της $f(x)$ επιβεβαιώστε τα αποτελέσματά σας στην δεύτερη γραμμή ($\Delta=0$) του παραπάνω πίνακα.
12. Μετακινείτε το σημείο του δρομέα γ στην τιμή -3 ($\gamma=-3$). Μετακινείτε το σημείο x από αριστερά της γρ. παράστασης προς τα δεξιά της παρακολουθώντας το πρόσημο των τιμών της $f(x)$ επιβεβαιώστε τα αποτελέσματά σας στην δεύτερη γραμμή ($\Delta<0$) του παραπάνω πίνακα.
13. Κλείστε το αρχείο **1_Εξίσωση_Ανίσωση_2ου_βαθμ_ΠρόσημοΤριωνύμου.ggb** χωρίς να το αποθηκεύσετε. Να λύσετε τις παραπάνω ανισώσεις στο τετράδιό σας

- | | | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-------|
| 1. $x^2+4x-5>0$ | 2. $3x^2-2x-2\geq 0$ | 3. $x^2-2x<0$ | 4. $4x^2-4x+1\leq 0$ | 5. |
| $x^2+2x+3>0$ | | | | |
| 6. $-2x^2+x+3\leq 0$ | 7. $-3x^2+2<0$ | 8. $-x^2+2x-4\geq 0$ | 9. $-3x^2+8x-4>0$ | 10. - |
| $4x^2<0$ | | | | |