

«Το τρίγωνο του Sierpinski αφορμή για τη διδασκαλία της Γεωμετρικής Προόδου μέσα από την ψηφιακή πλατφόρμα “Αίσωπος”»

Βλάχος Ζώης¹, Βλάχου Μαρία²

¹ Καθηγητής Μαθηματικών, Γυμνάσιο Κορώνης Μεσσηνίας
zitavita21@gmail.com

² Καθηγήτρια Μαθηματικών & Πληροφορικής, 4ο Γενικό Λύκειο Κορυδαλλού
maria.s.vlachou@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το παρόν διδακτικό σενάριο είναι μια εργασία, η οποία έχει αναρτηθεί στην ψηφιακή πλατφόρμα «Αίσωπος» και βρίσκεται στον παρακάτω σύνδεσμο <http://aesop.iep.edu.gr/node/15259> (Βλάχος, 2015). Το σενάριο αυτό αφορά μαθητές της Β Λυκείου στο μάθημα της Άλγεβρας, στο κεφάλαιο Πρόοδοι και θα διαπραγματευτούμε την έννοια της Γεωμετρικής Προόδου. Η εύρεση γενικού τύπου μιας ακολουθίας με γεωμετρική πρόοδο, καθώς και ο αναδρομικός της τύπος θα αναζητηθούν μέσα από αυτοόμοια σχήματα, τα γνωστά μας fractal και πιο συγκεκριμένα μέσα από το τρίγωνο Sierpinski. Η γεωμετρική πρόοδος μπορεί να αναδειχθεί μέσα από τα fractals, τα οποία με τη βοήθεια των νέων τεχνολογιών χαρίζουν ομορφιά και αναδεικνύουν τα Μαθηματικά εκτός από εργαλείο κατανόησης του κόσμου και σε ένα είδος τέχνης. Η σύνδεση των αυστηρών μαθηματικών εννοιών με την αναπαράσταση των αυτοόμοιων σχημάτων από τους H/Y , θεωρείται ότι βοηθάει τα παιδιά να ξεπεράσουν οποιεσδήποτε δυσκολίες προκύψουν και συγχρόνως τους δίνει το ερέθισμα για την περαιτέρω ενασχόλησή τους με την κατηγορία αυτή. Επίσης, μέσα από την αυτοομοιότητα αναζητούμε το άθροισμα των n διαδοχικών όρων μιας γεωμετρικής προόδου και στο τέλος χρησιμοποιούμε κάποιες μεταγνωστικές δραστηριότητες για εμπέδωση και ανατροφοδότηση. Από το σενάριο έχει εξαιρεθεί εσκεμμένα ο γεωμετρικός μέσος και αφήνεται να διδαχθεί σε μια 4η μελλοντική ώρα.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: γεωμετρική πρόοδος, τρίγωνο Sierpinski, fractals

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το προτεινόμενο εκπαιδευτικό σενάριο διαφοροποιείται από το παραδοσιακό πλαίσιο της διδασκαλίας των Μαθηματικών, καθώς με την κατασκευή του fractal από τους ίδιους τους μαθητές και με τη χρήση των τεχνολογικών εργαλείων αναμένεται να τους βοηθήσει να συνειδητοποιήσουν ότι τα Μαθηματικά αποτελούν αντικείμενο διερεύνησης (δυνατότητες διερευνητικής μάθησης) και να καταλήξουν στα δικά τους συμπεράσματα, τα οποία πρέπει να έχουν κοινωνική αποδοχή (στο πλαίσιο της τάξης) και επιστημονική τεκμηρίωση.

Από την άλλη, είναι γνωστό ότι οι μαθητές μας παρουσιάζουν δυσκολίες στην κατανόηση εννοιών οι οποίες είναι επαναλαμβανόμενες σε άπειρο πλήθος βημάτων. Η διαδικασία εικασίας εύρεσης γενικού τύπου γεωμετρικής προόδου, εύρεσης πεπερασμένου αθροίσματος και εικασίας της τιμής του σε άπειρα βήματα, μέσα από το δυναμικό περιβάλλον μαθηματικών λογισμικών

(geogebra) σχετίζεται άμεσα με τα γνωστά μας αυτομοιόμορφα γεωμετρικά σχήματα, τα λεγόμενα fractals.

Επιπλέον, γίνεται προσπάθεια τρόπου ανάδειξης και μελέτης των αναπαραστάσεων μέσω της εννοιολογικής χαρτογράφησης. Η εννοιολογική χαρτογράφηση (concept mapping) συνιστά έναν από τους πιο απλούς τρόπους αναπαράστασης της γνώσης (Γουλή, κ.α., 2006) και είναι μια διδακτική τεχνική και μια εκπαιδευτική στρατηγική που έχει ως σκοπό να ενισχύσει την ουσιαστική μάθηση (meaningful learning) (Ausubel et al., 1978). Δίνει την ευκαιρία στο μαθητή μέσω των εννοιών, των συνδέσμων και των στιγμιότυπων (McAleese, 1998) να συνδυάσει την έκφραση των ιδεών (με εικόνες, σχήματα και λέξεις), καθώς και τη σύνδεση ανάμεσα στις χρησιμοποιούμενες έννοιες. Βοηθά τόσο τον εκπαιδευόμενο όσο και τον εκπαιδευτή να κατανοήσει καλύτερα το περιεχόμενο και τη διαδικασία πραγματοποίησης της ουσιαστικής μάθησης (Mintzes et al., 2000).

Τέλος, στο σενάριο χρησιμοποιούνται δραστηριότητες διερευνητικής μάθησης, στις οποίες οι μαθητές εμπλέκονται σε ομάδες των δύο ή τριών ατόμων. Σύμφωνα με τους υποστηρικτές της εποικοδομιστικής και κοινωνικοπολιτιστικής θεωρίας, η διερευνητική μάθηση ενδείκνυται ώστε οι μαθητές να εμπλέκονται σε δραστηριότητες μέσω των οποίων κατασκευάζουν ενεργητικά τη γνώση, χρησιμοποιώντας τις προϋπάρχουσες γνώσεις τους και ότι η γνώση προκύπτει ως κοινωνική κατασκευή.

Στο σενάριο αξιοποιείται το διερευνητικό εκπαιδευτικό λογισμικό Geogebra. Επίσης, αξιοποιούνται ένα πλήθος από διαδραστικά εργαλεία που παρέχονται από την πλατφόρμα, ειδικότερα οι κάρτες ερωτήσεων, οι διαδραστικές ενεργές περιοχές, οι ερωτήσεις μοναδικής επιλογής, το χρονολόγιο κλπ. Εκτός των άλλων, χρησιμοποιούνται ελεύθερες διαδραστικές εφαρμογές, όπως είναι η κατασκευή εννοιολογικού χάρτη με το porplet και η δημιουργία διαδραστικού πίνακα με το radlet. Η χρήση των παραπάνω εργαλείων έχει ως στόχο την ενεργητική συμμετοχή, την αυτενέργεια, τον πειραματισμό των μαθητών και την καλύτερη οπτικοποίηση των εννοιών και διαδικασιών που μελετώνται.

ΣΤΟΧΟΙ

Μετά το τέλος του μαθήματος, αναμένεται οι μαθητές να

- διερευνούν ακολουθίες με σταθερό λόγο διαδοχικών όρων και ορίζουν τη γεωμετρική πρόοδο
- εξετάζουν αν μια ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος, τεκμηριώνοντας το συλλογισμό τους
- υπολογίζουν το n -οστό όρο και το άθροισμα των πρώτων n όρων μιας γεωμετρικής προόδου
- μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα με χρήση του n -οστού όρου και του αθροίσματος n -πρώτων όρων

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ

Το μαθησιακό-υλικοτεχνικό υλικό που χρησιμοποιείται είναι:

- λογισμικό Geogebra (με αυτό έχουμε ως στόχο να αναλύσουμε, να εντοπίσουμε, να εξηγήσουμε, να μετρήσουμε και να αξιολογήσουμε τη νέα έννοια που θα διδαχθούν οι μαθητές)
- εννοιολογικοί χάρτες (οι εννοιολογικοί χάρτες που θα χρησιμοποιήσουμε έχουν ως στόχο οι μαθητές να ταξινομήσουν τις νέες έννοιες που έμαθαν και να τις αντιπαρατάξουν με αυτές της αριθμητικής προόδου).

- διαδραστικός πίνακας (ο οποίος θα χρησιμοποιηθεί στη μεταγνωστική δραστηριότητα).
- φύλλα εργασίας

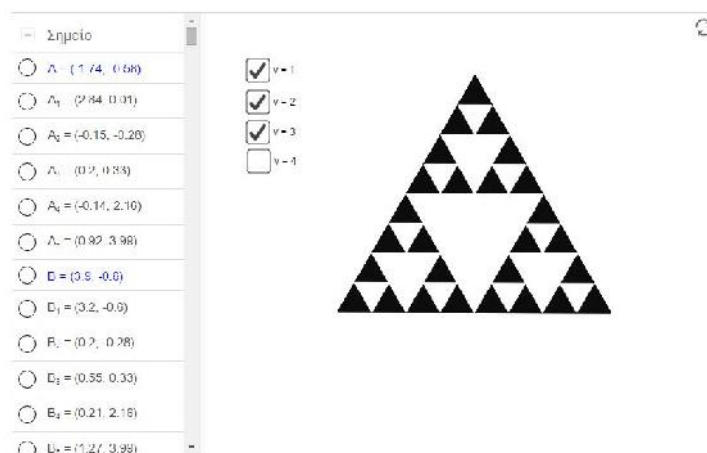
ΠΟΡΕΙΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Το διδακτικό σενάριο εκτυλίσσεται μέσα σε τρεις διδακτικές ώρες και χωρίζεται σε πέντε φάσεις.

Στην πρώτη φάση, η οποία έχει διάρκεια 35 λεπτά, αρχικά γίνεται υπενθύμιση της ομοιότητας δύο γεωμετρικών σχημάτων και γνωριμία με την αυτοομοιότητα και τις ιδιότητές της και επισημαίνονται οι διαφορές της με τα απλά σχήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Εδώ, ζητείται από τους μαθητές να αναζητήσουν στο διαδίκτυο εικόνες σχετικές με τα fractal, να εντοπίσουν κάποιες χαρακτηριστικές ιδιότητες που μπορούν να αντιληφθούν με μια πρώτη ματιά, να διακρίνουν την επανάληψη και να μπορέσουν να βρουν κάποια στοιχεία της φύσης που ίσως προσομοιάζουν με κάποια από τα fractal που βλέπουν στις φωτογραφίες.

Στη συνέχεια, οι μαθητές καλούνται να πατήσουν στο σύνδεσμο <http://tube.geogebra.org/m/1422611>

Sierpinski Triangle - zitavita



Σχήμα 1: Το τρίγωνο Sierpinski από το αποθετήριο του Geogebra

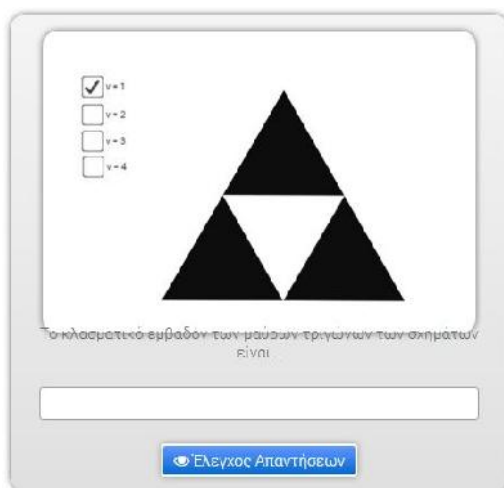
όπου θα οδηγηθούν στο αποθετήριο των έργων του Geogebra και πιο συγκεκριμένα στο τρίγωνο Sierpinski (Σχήμα 1), στο οποίο μέσα σε τέσσερα επεξηγηματικά βήματα οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν ένα φύλλο εργασίας, βρίσκοντας το λόγο της γεωμετρικής προόδου και προσδιορίζοντας το γενικό τύπο της. Επίσης, δίνεται και ένα ίδιο, αλλά συμπληρωμένο φύλλο εργασίας. Στο τέλος της πρώτης αυτής φάσης δίδεται ο ορισμός της γεωμετρικής προόδου, σύμφωνα με σχολικό εγχειρίδιο (Ανδρεαδάκης κ.α., 1998).

Στη δεύτερη φάση, η οποία διαρκεί 10 λεπτά, γίνεται η απόδειξη του n -οστού όρου γεωμετρικής προόδου με τον κλασικό αλγεβρικό τρόπο.

Η τρίτη φάση, διάρκειας 45 λεπτών, περιλαμβάνει αποκλειστικά δραστηριότητες στις οποίες οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν στις ερωτήσεις που τίθενται στο αντίστοιχο φύλλο εργασίας, το οποίο μπορούν να το συμπληρώσουν είτε σε έντυπη είτε σε ηλεκτρονική μορφή. Ενδείκνυται να δουλεύουν σε ομάδες των δύο ατόμων ανά υπολογιστή, όπου ο ένας μαθητής της κάθε ομάδας μπορεί να χειρίζεται το Geogebra, ενώ ο δεύτερος να συμπληρώνει το φύλλο εργασίας συζητώντας μεταξύ τους.

Εναλλακτικά, οι δραστηριότητες μπορούν να πραγματοποιηθούν στην τάξη με τη χρήση βιντεοπροβολέα και φορητού υπολογιστή, τον οποίο χειρίζεται ο δάσκαλος και έντυπων φύλλων εργασίας που έχουν διανεμηθεί στους μαθητές.

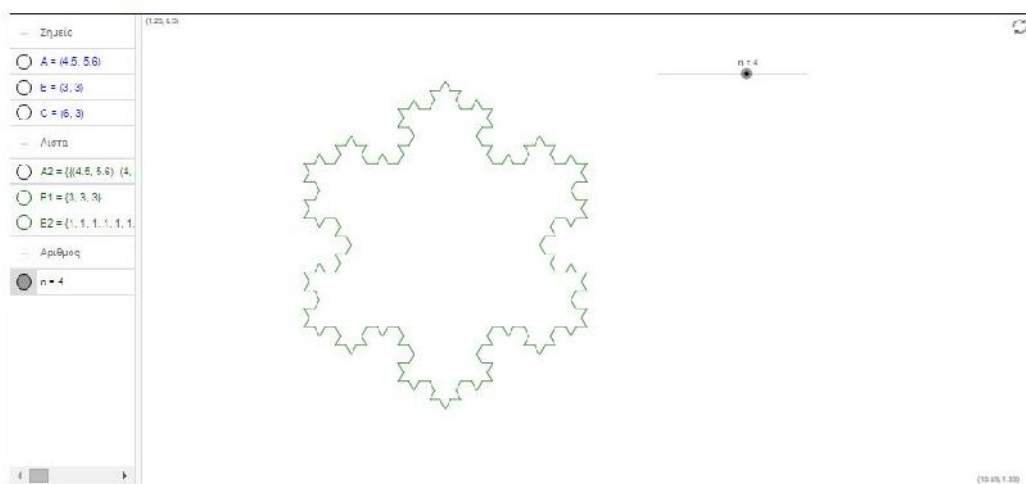
Ειδικότερα, στην πρώτη δραστηριότητα ζητείται να απαντηθούν τέσσερις κάρτες ερωτήσεων (Σχήμα 2) με κουμπί ελέγχου απαντήσεων, ένα εργαλείο που είναι ενσωματωμένο στην πλατφόρμα του Αίσωπος. Οι κάρτες αναφέρονται στον υπολογισμό του κλασματικού εμβαδού των μαύρων τριγώνων που εμφανίζονται σε κάθε βήμα, στο τρίγωνο Sierpinski.



Σχήμα 2 : Κάρτες ερωτήσεων της πλατφόρμας Αίσωπος

Στη δεύτερη δραστηριότητα δίνεται ένα ενσωματωμένο στην πλατφόρμα έργο, επίσης από το αποθετήριο του Geogebra και αφορά τη χιονονιφάδα του Koch (Σχήμα 3).

Koch zitavita



Σχήμα 3 : Η χιονονιφάδα του Koch από το αποθετήριο του Geogebra

Μετακινώντας το δρομέα από την πρώτη θέση έως την έκτη, οι μαθητές καλούνται, χρησιμοποιώντας τις γνώσεις που απέκτησαν από την προηγούμενη δραστηριότητα, να ορίσουν έναν γενικό τύπο και μια αναδρομική ακολουθία, συμπληρώνοντας έναν πίνακα, που να βρίσκει το μήκος μιας πλευράς κάθε σχήματος, την περίμετρο κάθε σχήματος αν το αρχικό ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά ίση με 1 και το πλήθος των πλευρών κάθε σχήματος (Πίνακας 1).

Βήμα	Μήκος πλευράς L_n	Περίμετρος Π_n	Πλήθος πλευρών N_n
$v=0$	1	3	3
$v=1$			
$v=2$			
$v=3$			
...	...	...	...
$v=v$			

Πίνακας 1: Συμπλήρωση πίνακα για τη χιονονιφάδα του Koch

Στη φάση αυτή δίνονται δύο φύλλα εργασίας ένα κενό και ένα συμπληρωμένο.

Στην τέταρτη φάση, διάρκειας 30 λεπτών, οι μαθητές υπολογίζουν το άθροισμα των τριγώνων που εμφανίζονται στο fractal για το τρίγωνο του Sierpinski (Πίνακας 2) μπαίνοντας στο σύνδεσμο <http://tube.geogebra.org/m/1422611>. Δίδεται ένα φύλλο εργασίας όπου αρχικά θα εικάσουν τον γενικό τύπο εύρεσης του αθροίσματος του πλήθους των τριγώνων που εμφανίζονται μετά από n πεπερασμένα βήματα και στη συνέχεια θα αποδείξουν τον τύπο του αθροίσματος n διαδοχικών όρων μιας γεωμετρικής προόδου, με τον κλασικό αλγεβρικό τρόπο.

Βήματα	Πλήθος τριγώνων	Άθροισμα
Αρχικό τρίγωνο	1	1
αν $v = 1$	$3^1 + 3^0 + 1$	5
αν $v = 2$	$3^2 + 3^1 + 3^0 + 1$	
αν $v = 3$		
αν $v = 4$		
...		
Γενικός τύπος		

Πίνακας 2: Συμπλήρωση πίνακα πλήθους τριγώνων

Εν συνεχεία, θα έχουν τη δυνατότητα να απαντήσουν ποιο είναι το άθροισμα σε οποιοδήποτε βήμα τους ζητηθεί και τέλος να κάνουν μια υπόθεση για την περίμετρο που θα έχει το "εναπομείναν" μέρος του τριγώνου που θα έχει μείνει μετά τη επαναλαμβανόμενη "διάτρησή" του από αυτοόμορφα τρίγωνα. Ακόμη, τους δίδεται και ένα ίδιο, αλλά συμπληρωμένο φύλλο εργασίας.

Επίσης, δίνεται ένα φύλλο εργασίας (φύλλο εργασίας 3) διαβαθμισμένης δυσκολίας με ασκήσεις τύπου Σωστού -Λάθους, ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, συμπλήρωσης κενών και ανάπτυξης, που οι μαθητές θα εξασκηθούν σε όποιες αυτοί νομίζουν, για την εμπέδωση της ύλης στο σπίτι. Στο τέλος της τέταρτης φάσης γίνονται ερωτήσεις μοναδικής επιλογής ένα ψηφιακό εργαλείο που είναι ενσωματωμένο στην πλατφόρμα (Σχήμα 4).

Δραστηριότητα: Βρείτε το άθροισμα των n πρώτων όρων

Διευκρίνιση

Διευκρίνιση:

Δίνονται 4 γεωμετρικές πρόοδοι με τρεις πιθανές απαντήσεις η κάθε μία. Να βρείτε τη σωστή απάντηση

5, 15, 45, ...



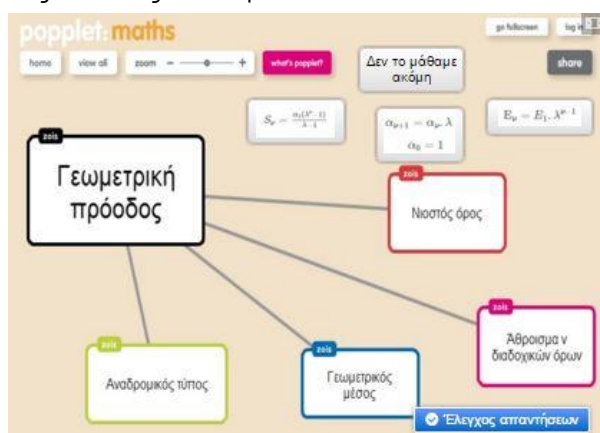
$$S_n = 5 \cdot \left[\left(\frac{1}{5}\right)^n - 1\right]$$

$$S_n = \frac{5}{2} \cdot (3^n - 1)$$

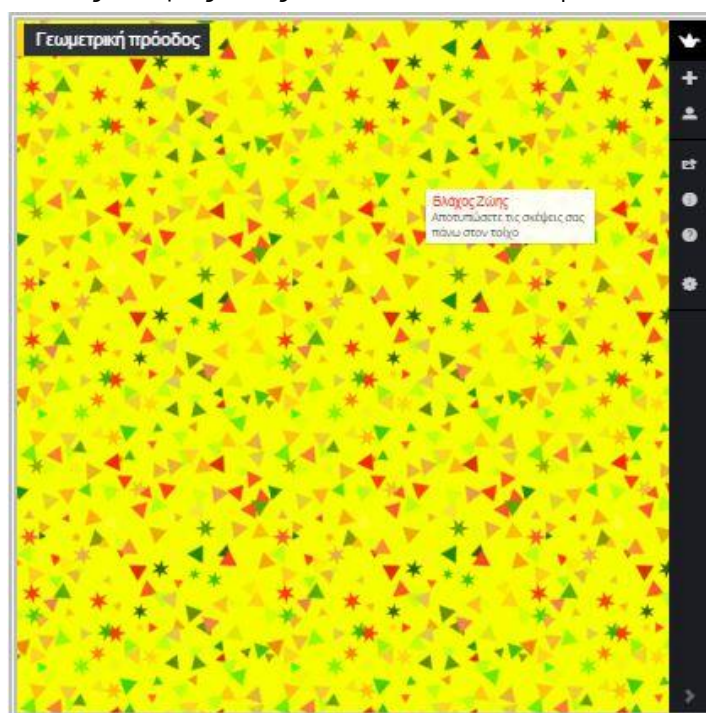
$$S_n = 18 \cdot (3^n - 1)$$

Σχήμα 4 : Ερωτήσεις μοναδικής επιλογής, εργαλείο ενσωματωμένο στην πλατφόρμα Αίσωπος

Στην τελευταία φάση του διδακτικού σεναρίου, η οποία εκτιμάται στα 15 λεπτά, οι μαθητές συμπληρώνουν με εργαλεία WEB 2.0 σε έναν εννοιολογικό χάρτη (Σχήμα 5) τους τύπους που έμαθαν

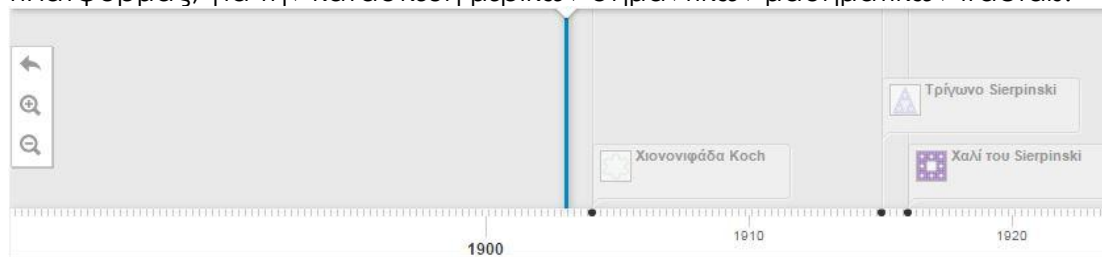


Σχήμα 5: Εννοιολογικός χάρτης Popplet και αποτυπώνουν τις σκέψεις τους πάνω σε έναν διαδραστικό τοίχο (Σχήμα 6).



Σχήμα 6: Διαδραστικός πίνακας Padlet

Οι σκέψεις αυτές μπορεί να αφορούν τη διεξαγωγή του μαθήματος, την κατανόηση των fractals, της εύρεσης γενικού τύπου μιας γεωμετρικής προόδου και τις νέες γνώσεις που απέκτησαν γενικά, καθώς και τη γνώμη τους για τον καινοτόμο τρόπο διδασκαλίας. Επίσης, στο τέλος, για την ιστορία των fractals, δίνεται ένα χρονολόγιο (Σχήμα 7), ένα ενσωματωμένο εργαλείο της πλατφόρμας, για την κατασκευή μερικών σημαντικών μαθηματικών fractals.



Σχήμα 7: Χρονολόγιο, ένα ενσωματωμένο εργαλείο της πλατφόρμας Αίσωπος

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Το σενάριο είναι διαθέσιμο προς εφαρμογή στην ψηφιακή πλατφόρμα Αίσωπος και έχει χαρακτηριστεί ως βέλτιστο. Επιθυμεί να αναδείξει κάποια από τα μυστικά που κρύβουν τα fractals και να διδάξει με ελκυστικό τρόπο ορισμένες από τις μαθηματικές έννοιες που συνδέονται με τη διδακτέα ύλη της Β' Λυκείου. Χρησιμοποιεί νέες τεχνολογίες και ψηφιακά διδακτικά εργαλεία που παρέχει η πλατφόρμα ή βρίσκονται ελεύθερα στο διαδίκτυο. Θεωρεί ότι οι μαθητές εισάγονται μέσω της πράξης στην επεξεργασία και τον υπολογισμό κάποιων από τις ιδιότητες των fractals. Η αποτελεσματικότητα της εφαρμογής του σεναρίου στην τάξη είναι το ζητούμενο και η επιτυχία του είναι ένα στοίχημα, ως εκ τούτου εικάζεται ότι υπάρχουν σοβαρές πιθανότητες για την υλοποίησή του.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α., Αδαμόπουλος Λ., Δαμιανού Χ., (1998), *Άλγεβρα και στοιχεία πιθανοτήτων, Α τάξης Γενικού Λυκείου*. Αθήνα : Διόφαντος.

Βλάχος Ζ. (2015), *Γεωμετρική πρόοδος*, Διαθέσιμο on line : <http://aesop.iep.edu.gr/node/15259>, προσπελάσθηκε στις 24/12/2015.

Γουλή, Ε., Γόγουλου, Α., & Γρηγοριάδου, Μ. (2006), *Ο Εννοιολογικός Χάρτης στην Εκπαιδευτική Διαδικασία του μαθήματος της Πληροφορικής: Μια Πιλοτική Διερεύνηση*. Θέματα στην Εκπαίδευση, Ειδικό Αφιέρωμα: Σύγχρονη έρευνα στη Διδακτική της Πληροφορικής, 7:3, 351-377. Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα.

Ausubel D., Novak J., & Hanesian H., (1978), *Educational Psychology: A cognitive view*. (2nd ed.) New York: Holt, Rinehart & Winston.

Dillenbourg, P. (1999). *Collaborative Learning: Cognitive and Computational Approaches*. Oxford, UK: Elsevier Science.

Hakkarainen, K. (2003). *Emergence of progressive-inquiry culture in computer supported collaborative learning*. Learning Environments Research, 6, 199-220.

Hoadley, C. M., & Linn, M. C. (2000). *Teaching science through online, peer discussions: Speak easy in the knowledge integration environment*. International Journal of Science Education, 22, (8), 839-857.

McAleese R., (1998), *The Knowledge Arena as an Extension to the Concept Map: Reflection in Action*. Interactive Learning Environments, Vol. 6, No. x, pp.1-22.

Mintzes J., Wandersee J., & Novak J., (2000), *Assessing Science Understanding: A Human Constructivist View*. Educational Psychology Series, Academic Press.

Van Merriënboer, J. J. G., Bastiaens, T. & Hoogveld, A., 2004, *Instructional design for integrated e-learning*, In W. Jochems, J. Van Merrienboer and R. Koper, *Integrated eLearning: Implications for Pedagogy, Technology and Organization*. London: RoutledgeFalmer, p.13-23.